Classes préparatoires MPSI,
Lycée Roosevelt, Reims
Rentrée de Septembre 2017

Consignes d'été en Mathématiques

Le mot du professeur

Dès la rentrée, nous allons passer beaucoup de temps ensemble (10h de cours, 2h de TD rien que pour les maths) et le travail demandé va largement au-delà de ce que vous pouviez fournir en terminale. Pour se faciliter la tâche, je vous propose ces devoirs de vacances afin de ne pas trop rouiller pendant les congés et d'attaquer l'année dans les meilleurs dispositions. Ces exercices seront corrigés en classe au cours des premières semaines. Mon investissement pour vous faire réussir sera à la hauteur du vôtre : je suis toujours disponible pour répondre à vos questions que celles-ci soient posées pendant les cours, à la fin de ceux-ci ou par mail.

Pour les fournitures, les cours et exercices seront effectués sur le support de votre choix. Les devoirs (maisons ou surveillés) seront faits sur des copies doubles. Achetez-en en quantité ! **La calculatrice étant interdite dans beaucoup d'épreuves de mathématiques lors des concours, elle sera interdite tout au long de l'année** donc celle que vous possédez déjà suffira amplement pour les autres matières. Enfin vous vous munirez impérativement d'un cahier, plutôt grand format (par exemple 24×32) pour le jour de la rentrée.
Sur celui-ci, vous résumerez au fur et à mesure de l'année les cours dispensés. Il remplacera les fiches cartonnées volantes que vous avez sûrement dû faire en terminale. Ce cahier constituera en fin d'année le corpus essentiel des connaissances acquises en vue d'affronter la deuxième année de prépa. Ce cahier sera vérifié régulièrement au cours de l'année. Un site internet sera mis en place pour recevoir les documents distribués au fur et à mesure de l'année. (http ://meriauxmpsi.free.fr/)

Une matière, intitulée "Informatique pour tous", est en place depuis quelques années en PCSI et MPSI. Elle prolonge et approfondi l'approche de l'algorithmique abordée au lycée. Si vous avez été complètement dépassé par cet aspect au lycée, n'hésitez pas à reprendre les bases à zéro en manipulant le logiciel Scratch (http ://scratch.mit.edu/) qui permet une approche ludique de l'algorithmique (ceci n'est absolument pas un pré-requis pour suivre les cours). Les langages Python et SQL seront principalement utilisés lors de ce cours.

Enfin, si vous rencontrez des problèmes sur les exercices ou que vous voulez me joindre pendant les vacances ou l'année scolaire qui suivra, voici mes coordonnées :

Antoine Mériaux
Tél : 06 74 44 08 45
Mail : antoine.meriaux@free.fr

Les Exercices !

Exercice 1

1. $\cos(a+b) =$ $\qquad\qquad$ $\cos(a-b) =$
2. Vérifier que $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
3. $\sin(a+b) =$
4. Obtenir une formule pour $\cos(n\pi), \forall n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer pour $a \geqslant b \geqslant 0$ que
$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{a-b})} + \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{a-b})}$$
6. Simplifier les expressions suivantes.
$$A = \ln(3^4) + \ln(3^2) - \ln(3^6) \qquad B = 5^0 \times e^{(2\ln(5))} \qquad C = \frac{\ln(3^5)}{\ln(3)} \qquad D = (-1)^{10}\,\frac{e^3 - e^5}{e^3 + e^4}$$
7. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \frac{1}{x}$, calculer $f'(x)$; On pose $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = f'(x)$, calculer $g'(x)$.
8. Discuter et résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{2}{x}$
9. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{ax+b}$, $x \mapsto sin(ax+b)$ et $x \mapsto cos(ax+b)$.
10. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation
$$\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{2x^2-3x} = \frac{5}{x}$$

Exercice 2

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes en précisant là où elles sont dérivables
   (a) $x \mapsto \sqrt{1-x}$
   (b) $x \mapsto (1-x)e^{(-x^2)}$
   (c) $x \mapsto e^{(-e^{-x})}$
   (d) $x \mapsto -\ln(1-x)$
2. Déterminer les limites suivantes (si elles existent)
$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} \text{ (on pourra utiliser la forme conjuguée)} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\ln(x)e^{-5x} \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x)e^{-5x}$$
3. Déterminer, pour tout x de $\mathbb{R}$, le signe de $-2e^{2x} + 8e^x$
4. Déterminer, pour tout x de $]0;+\infty[$, le signe de $5\left(\ln(x)\right)^2 - 10\ln(x) + 5$
5. Résoudre l'équation
$$\frac{x+7}{x-3} + \frac{4x-2}{x-5} = 5$$
6. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$, $\sqrt{x-1} < \sqrt{2x-3}$
7. Mettre sous forme de quotients avec un dénominateur rationnel les quantités
   (a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$
   (b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} =$
   (c) $\frac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}} =$
   (d) $\frac{3+2\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}} =$
8. Simplifier l'expression
$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$
9. Mettre sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants
   (a) $(1+i)^4$
   (b) $(1-3i)^2$
   (c) $i(i+1)(2i+1)^2$
   (e) $\frac{1-i}{1+3i}$
   (f) $\frac{\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)}{1-i\sqrt{3}}$

Exercice 3

Au tennis, le joueur qui « est au service » joue une première balle.
Si elle est jugée « bonne », il joue l'échange et peut gagner ou perdre.
Si elle est jugée « faute », il joue une deuxième balle.
Si cette deuxième balle est jugée « bonne », il joue l'échange et peut gagner ou perdre.
Si cette deuxième balle est jugée « faute », il perd.
On désigne par

S_1 : l'événement « la 1re balle de service est « bonne » » ;
S_2 : l'événement « la 2e balle de service est « bonne » » ;
G : l'événement « le point est gagné par le joueur qui est au service ».

Pour le joueur Naderer qui est au service, on dispose des données suivantes :

— sa première balle de service est jugée « bonne » dans 40% des cas ;
— sa deuxième balle de service est jugée « bonne » dans 95% des cas ;
— si sa première balle de service est jugée « bonne », il gagne l'échange dans 80% des cas ;
— si sa deuxième balle de service est jugée « bonne », il gagne l'échange dans 60% des cas.

Pour tout événement A on note $\overline{A}$ l'événement contraire.

1. Calculer $p(S_1 \cap G)$.
2. Montrer que la probabilité que le joueur Naderer gagne l'échange est de $0,662$.
3. Sachant que le joueur Naderer a gagné l'échange, calculer la probabilité que sa première balle de service ait été jugée « bonne ». Le résultat sera arrondi au millième.
4. Calculer la probabilité que le joueur Naderer gagne quatre échanges consécutifs, ces échanges étant supposés indépendants. On donnera le résultat arrondi au millième.

Exercice 4

1. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$, $(x-1)(1-3x) < 0$.
2. Calculer l'intégrale suivante $\int_0^{\pi} \cos(2x)\,dx$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations
$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} < \dfrac{x+3}{2} \\ \dfrac{x+1}{x-1} > \dfrac{x+3}{x+1} \end{cases}$$
4. Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(3t)$ en fonction de $\cos(t)$, en déduire une expression de $\cos(9t)$ en fonction de $\cos(t)$.
5. Étudier les variations sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction $f : x \longmapsto x\sin(x)$.
Représentation graphique du graphe de f.
6. Calculer l'intégrale suivante
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$$
7. Résoudre l'équation $(x-5)(x-7) + (x-5)^2 = 0$.
8. Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x^2 + y^2 = 153 \end{cases}$$
(On pourra remarquer que $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$)
9. Résoudre les équations suivantes
$$\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(6) \qquad \ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln(x+8))$$
10. Déterminer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans le cas où $3u_{n+1} = 2u_n + 3$, $u_0 = 4$. On commencera par déterminer α tel que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \alpha$ soit géométrique.

Exercice 5

On note pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = x + \ln(4) + \frac{2}{\cdots}$$

2. Déterminer les asymptotes éventuelles du graphe de f.
3. Tracer le graphe de f.
4. Calculer $f(x)+f(-x)$. En déduire que pour tout couple de points $M(x, f(x))$ et $M'(-x, f(-x))$ le point de coordonnées $I(0; 1+\ln(4))$ est le milieu du segment $[MM']$. Quelle interprétation graphique pour le graphe de f cette propriété peut-elle avoir ?
5. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution.

Exercice 6
Une urne contient 10 boules blanches et 2 noires. On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule blanche. On désigne alors par X la variable aléatoire égale au nombre total de boules prélevées.

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Calculer la valeur de $P[X=1]$.
   (c) Montrer que $P[X=2] = \frac{5}{33}$
   (d) Calculer $P[X=3]$.
2. Montrer que $E(X) = \frac{13}{11}$.
3. Calculer $E(X^2)$ et en déduire que $V(X) = \frac{65}{363}$

Exercice 7
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.
   (a) Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante, minorée par 0. En déduire qu'elle converge.
   (b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Calculer I_0 puis I_1. En déduire que la limite de $(I_n)_n$ est 0.
2. Pour tout entier naturel n, on note : $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \; dt$.
   (a) Calculer w_0 et w_1.
   (b) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Montrer pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant 0$.
   En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : t \mapsto \cos^{n+1}(t)\sin(t)$. Calculer f'_n puis en déduire que
   $$w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n t \; \sin^2 t \; dt$$
   (e) En déduire : $w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n$.
   (f) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (n+1)w_n w_{n+1}$ est constante. Déterminer cette constante.

Exercice 8
Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(\theta)}\cos(\theta)\, d\theta \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2(x)}\, dx$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{x^3+3x}{x^4+6x^2+5}\, dx \qquad \int_0^3 \frac{x^2}{x+3}\, dx \text{ (on pourra remarquer que } x^2 = (x^2+3x)-(3x+9)+9)$$