P2ECS 2017 - 2018

Révisions pour l'entrée en deuxième année

Chapitre 1 : calculs !

1. Puissances et racines

Rappels :

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$, $a^{xy} = (a^x)^y$, $\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$, $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $\dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$
- $\sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt{a^x} = a^{x/2}$

Exercices :

1. Simplifier $\dfrac{\sqrt{4\pi}}{2\sqrt{2}}$.
2. Simplifier $3^{7/2} \times 3^2$ et $\dfrac{6^{5/2}}{3^2}$.
3. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{10} 2^k$

2. Factorielles et coefficients binomiaux

Rappels :

- $(n+1)! = (n+1) \times n!$
- $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$
- Si une suite (u_n) vérifie $u_{n+1} = (n+1)u_n$, alors $u_n = n! \times u_0$

- $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

<u>Exercices :</u>

1. Simplifier $\dfrac{n!}{n}$, $\dfrac{n!}{n(n-1)}$, et $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$.
2. Simplifier $\binom{n}{2}$.
3. Montrer : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ (*formule à apprendre par coeur, pour les calculs d'espérances*)
4. Soit $u_n = \dfrac{2^n}{n!\sqrt{2n}}$. Simplifier le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en donner un équivalent.

3. Systèmes linéaires

Résoudre les systèmes suivants, uniquement par méthode du pivot :

$$(1)\left\{\begin{array}{l} x+2y=5 \\ 2x+y=4 \end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x+2y+3z=14 \\ 3x+2y+2z=7 \end{array}\right.$$

4. Dérivées :

Dériver $\dfrac{1}{2x+1}$, $\dfrac{1}{x^2+2x}$, $\dfrac{x}{x+1}$, $\dfrac{e^x}{1-x}$, $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $e^{-(2x^2+3x+1)}$.

5. Développements limités et équivalents :

Calculer les développements limités suivants, à l'ordre 2 :

1. $\dfrac{1}{2+x}$
2. $\dfrac{\sin x}{x}$
3. $\ln(n+1) - \ln(n)$ quand n tend vers ∞
4. e^{2x}

Donner un équivalent pour les fonctions ou suites suivants :

1. $\ln(x^2+1) - \ln(x^2)$ en $+\infty$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ quand x tend vers 1
3. $\dfrac{e^x}{x}$ en 0
4. $\dfrac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2}$ en 0

Chapitre 2 : algèbre linéaire

1. Ecrire sous forme de Vect :
   (a) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - 3z = 0\}$
   (b) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y = 0 \text{ et } x - z = 0\}$:
   (c) $G : \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$:
2. Montrer que G (défini à la question précédente) est un espace vectoriel.
3. La famille des vecteurs $\vec{u} = (-1, 3, 2), \vec{v} = (7, 0, -5)$ est-elle génératrice dans $\mathbb{R}^3$?
4. Pourquoi la famille $\left((X - a)^k\right)_{0 \leq k \leq n}$ est-elle libre dans $\mathbb{K}[X]$?
5. Donner l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
6. Justifier que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(a, b) = \begin{pmatrix} a + b & b \\ b & a - b \end{pmatrix}$ est une application linéaire injective. Donner son rang. Ecrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Soit g l'application $g : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $g(P) = XP'(X) - 2P(X)$. Justifier que g est linéaire, donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, donner le rang de g et dire si g est injective. Si ce n'est pas le cas, donner son noyau et son image.
8. Déterminer la matrice, le rang et l'image de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :
$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, x + 3y + z)$$
9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $f \ : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto MA \end{array} \right.$
   Justifier la linéarité de f et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Quel est le rang de f ?
10. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
    (a) Calculer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.
    (b) Soit $e_1 = (0, 0, 1), \quad e_2 = (1, 1, 1), \quad e_3 = (4, 2, 1)$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
    (c) Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
    (d) Donner la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3).
11. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.
12. Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Chapitre 3 : indications et réponses

Chapitre 1

Puissances et racines

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 2. $3^{11/2}$ et $3^{1/2} \times 2^{5/2} = 4\sqrt{6}$

3. $2^{\sum_{k=1}^{10} k} = 2^{\frac{10\times 11}{2}} = 2^{55}$.

Factorielles et coefficients binomiaux

1. $(n-1)!$, $(n-2)!$ et $\dfrac{n}{(n+1)!}$ 2. $\dfrac{n(n-1)}{2}$

3. *Développer les coefficients binomiaux avec les factorielles*

4. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2\sqrt{n}}{n+1\sqrt{n+1}} \sim \dfrac{2}{n}$

Systèmes linéaires

(1) $y = 2, x = 1$ (2) $z = -3, y = 14, x = -5$

Dérivées

$$-\frac{2}{(2x+1)^2},\ -\frac{2x+2}{(x^2+2x)^2},\ \frac{1}{(x+1)^2},\ \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2},\ -\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right),\ -(4x+3)e^{2x^2+2x+1}$$

Développements limités et équivalents

1. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{8}+\circ(x^2)$ 2. $1-\dfrac{x^2}{6}+\circ(x^2)$ 3. $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+\circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ 4. $1+2x+2x^2+\circ(x^2)$

Chapitre 2

1. a) $E = \text{ Vect}\left((-2,1,0),\ (3,0,1)\right)$ b) $F = \text{ Vect}\left((1,-1/2,1)\right)$
   c) $G = \text{ Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

2. *Un Vect est toujours un espace vectoriel !*

   Sinon : vérifier

   - *que la matrice nulle est dans G ($a = b = 0$)*
   - *la stabilité par cbl (en notant $M(a,b)$ les éléments de G, on vérifie facilement que $M(a,b) + \lambda M(a',b') = M(a+\lambda a', b+\lambda b')$)*

3. *Non car famille de cardinal 2 dans un espace de dimension 3.*

4. *Famille échelonnée en degré.*

5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = (x-y, 2x)$$

6. • *Linéaire :* $\forall ((a,b),(a',b'),\lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f((a,b)+\lambda(a',b')) &= f(a+\lambda a', b+\lambda b') \\ &= \begin{pmatrix} a+\lambda a' + b + \lambda b' & b+\lambda b' \\ b+\lambda b' & a+\lambda a' - (b+\lambda b') \end{pmatrix} \\ &= f(a,b)+\lambda f(a',b') \end{aligned}$$

• *Injective :* $f(a,b) = (0) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=0$

• *Rang : par le thm du rang,* $rg(f) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\ Ker\,(f)) = 2-0 = 2$

• *Matrice de f : la dimension de l'espace de départ est 2 donc 2 colonnes ; celle de l'espace d'arrivée est 4 donc 4 lignes;*

la première colonne représente $f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *;*

la deuxième colonne représente $f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *;*

donc $Mat(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

7. *Matrice de g : 4 lignes et 4 colonnes*

Première colonne donnée par : $g(1) = -2$ *;*

deuxième colonne donnée par : $g(X) = -X$ *;*

troisième colonne donnée par : $g(X^2) = 0$*;*

quatrième colonne donnée par : $g(X^3) = X^3$

donc $M = Mat_{(1,X,X^2,X^3)}(g) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice étant diagonale, la question du rang est facile : $rg(g) = rg(M) = 3$.

$Im\,(g) = \ Vect\,(g(1), g(X), g(X^2), g(X^3)) = \ vect\,(1, X, X^3)$

Par le théorème du rang, $\dim(\ Ker\,(g)) = 1$ *;*
or $X^2 \in \ Ker\,(g)$*, donc* $\ Ker\,(g) = \ vect\,(X^2)$.

8. $M = Mat(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

qui devient après les opérations : $C3 \leftarrow C3 - C1$, $C2 \leftarrow C2 - C1$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

matrice échelonnée à trois colonnes dont une nulle, donc : $rg(f) = rg(M) = 2$

$Im\,(f) = \; vect\,(f(1,0,0), f(0,1,0, f(0,0,1)) = \; Vect\,((1,1,1),(1,-1,3))$

9. - *Linéarité :* $\forall (M, M') \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})^2 \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(M + \lambda M') = (M + \lambda M')A = MA + \lambda M'A = f(M) + \lambda f(M')$
   - *Matrice :* $\dim(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})) = 4$ *donc matrice à 4 lignes et 4 colonnes.*

     Première colonne donnée par : $f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

     deuxième colonne donnée par : $f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

     troisième colonne donnée par : $f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

     quatrième colonne donnée par : $f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

     donc

     $$M = Mat_{(1,X,X^2,X^3)}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

     $rg(f) = rg(M) = 4$

10. (a) $\mathrm{Im}\,(f) = \; \mathrm{Vect}\,((3,1,0),(-2,0,1))$ *et* $\mathrm{Ker}\,(f) = \; \mathrm{Vect}\,((0,0,1))$

    (b) *Famille libre et cardinal = dimension de* $\mathbb{R}^3$

    (c) $f(e_1) = (0,0,0)$; $f(e_2) = e_2$ *et* $f(e_3) = 2e_3$

    (d) $Mat_{(e_1,e_2,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

11. $ad - bc = -3 \neq 0$ *donc matrice inversible ;* $A^{-1} = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

12. *Demandons le résultat à Scilab :*

```
--> A=[1 -1 0 ; 0 1 1 ; 1 2 5]
 A  =
   1.  -1.   0.
   0.   1.   1.
   1.   2.   5.
--> inv(A)
 ans  =
   1.5   2.5  -0.5
   0.5   2.5  -0.5
  -0.5  -1.5   0.5
```

Devoir maison pour le 08 septembre 2017
Algèbre linéaire et polynômes

EXERCICE 1 : les polynômes de Bernstein

On note $B_{n,k}$ les polynômes définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \text{ si } k \in [\![0, n]\!], \text{ et sinon } B_{n,k}(X) = 0.$$

1. Dans cette question uniquement, $n = 2$.
   (a) Calculer les $B_{2,k}$ pour $k \in [\![0, 2]\!]$.
   (b) Déterminer la matrice K_2 de la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (c) En déduire que la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(X) = 1$.
3. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

   En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kB_{n,k}(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$B_{n,k}(X) = (1-X)B_{n-1,k}(X) + XB_{n-1,k-1}(X)$$

5. Montrer que pour $0 \leq i \leq k \leq n$: $\binom{k}{i}\binom{n}{k} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$.

   En déduire que $\displaystyle\binom{n}{i} X^i = \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} B_{n,k}(X)$.
6. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

EXERCICE 2 (Edhec)

Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier naturel.
On note P_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n.
On note N_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des fonctions polynomiales P de degré inférieur ou égal à n, et telles que $P(0) = P(1) = 0$.

Pour tout entier naturel k on pose $P_k = X^{k+1}(X-1)$.
On note $\mathcal{B} = (1, X, \cdots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. (a) Montrer que, si $P \in N_{n+2}$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$P(X) = X(X-1)Q(X)$$
   (b) Montrer que $\mathcal{C} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de N_{n+2}. Donner la dimension de N_{n+2}.

2. On considère l'application linéaire v définie sur N_{n+2} par : $v(P) = P''$.
   (a) Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, exprimer $v(P_k)$ en fonction des éléments de $\mathcal{B}$; en déduire que $\mathrm{Im}\,(v) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Expliciter $v(P_0)$, $v(P_1)$ et $v(P_2)$.
   (c) Donner la matrice A de v relativement aux bases C (au départ) et $\mathcal{B}$ (à l'arrivée).
   (d) En déduire que v est un isomorphisme de N_{n+2} sur $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
   (a) Simplifier la somme $S_k(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} P_j(X)$.
   (b) Justifier que $S_k \in N_{n+2}$ et calculer $v(S_k)$.
   (c) En déduire l'antécédent de X^k par v, puis la matrice A^{-1}.
   (d) *Cas n=1 :* expliciter la matrice A, puis vérifier par le calcul la valeur trouvée pour A^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie).

4. On considère l'application w définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :
$$w(P) = ((X^2 - X)P)''$$
   (w associe à P la dérivée seconde du produit $(X^2 - X)P(X)$).
   (a) Montrer que w est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, déterminer $w(X^k)$.
   (c) En déduire que la matrice de w dans $\mathcal{B}$ n'est autre que la matrice A.
   (d) w est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

Devoir maison parisienne : une partie du sujet ESSEC 2017

Soit E un espace vectoriel réel et $\mathcal{A}$ une partie non vide de E.
On dit qu'un élément a de $\mathcal{A}$ est extremal si :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{A}^2 \quad \left(\frac{x+y}{2} = a\right) \Rightarrow x = y = a.$$

Partie I : étude d'un exemple dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on note $\mathcal{A}_2$ l'ensemble

$$\mathcal{A}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} \ / \ \alpha \in [0,1] \right\}$$

et J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, on note I_2 la matrice identité de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Description et propriété des éléments de $\mathcal{A}_2$.
   (a) Vérifier que $\mathcal{A}_2 = \{\alpha I + (1-\alpha)J,\ \alpha \in [0,1]\}$.
   (b) Soient $(\alpha, \beta) \in [0,1]^2$ et $(M_\alpha, M_\beta) \in \mathcal{A}_2^2$, montrer que
   $$\frac{1}{2}\left(M_\alpha + M_\beta\right) \in \mathcal{A}_2$$
   (c) Déterminer les éléments M_α de $\mathcal{A}_2$ qui sont inversibles dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Pour ceux-ci, donner l'expression de M_α^{-1} et préciser pour quelles valeurs $\alpha \in [0,1]$ $M_\alpha^{-1} \in \mathcal{A}_2$.
2. Points extremaux de $\mathcal{A}_2$.
   (a) Montrer que I_2 et J sont des points extremaux de $\mathcal{A}_2$.
   (b) Soit $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, vérifier que $M_\alpha = \frac{1}{2}(M_{2\alpha} + J)$; en déduire que M_α n'est pas extremal.
   (c) Par une méthode similaire, montrer que si $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, M_α n'est pas extremal.

Partie II : étude de l'ensemble des matrices bistochastique et de ses points extremaux

Dans toute la suite du problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 ; on note :

- $E = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$;
- $\mathcal{A}_n = \left\{ M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ m_{i,j} \geq 0,\ \ \forall i \in [\![1,n]\!] \ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1 \text{ et } \forall j \in [\![1,n]\!] \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1 \right\}$
  l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,

- $\mathcal{B} = (e_0, \cdots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

4. Premières propriétés de $\mathcal{A}_n$.
   (a) Soit $M \in \mathcal{A}_n$, montrer que sa transposée ${}^t\!tM \in \mathcal{A}_n$.
   (b) Soit $(M, M') \in \mathcal{A}_n^2$, montrer que $\dfrac{1}{2}(M + M') \in \mathcal{A}_n$.
   (c) On note $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont égales à 1. Montrer que si $M \in \mathcal{A}_n$, alors $MX_0 = X_0$.
   (d) Réciproquement, soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad m_{ij} \geq 0$, et telle que $MX_0 = X_0$ et ${}^tMX_0 = X_0$. Montrer que $M \in \mathcal{A}_n$.
   (e) Soit $(M, M') \in \mathcal{A}_n^2$, montrer que $MM' \in \mathcal{A}_n$.

5. Endomorphismes et matrices de permutations.

   On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

   Soit $\sigma \in S_n$, on note f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :
   $$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$
   On note M_σ la matrice de f_σ dans la base $\mathcal{B}$, et on dit que M_σ est la matrice de permutation associée à σ.

   (a) Quel est le cardinal de S_n ?
   (b) Etude de deux exemples : dans cette question $n = 3$. Pour chacun des exemples suivants, déterminer la matrice de permutation associée à σ, donner la réciproque σ^{-1} et sa matrice de permutation associée ; trouver une relation entre $M_{\sigma^{-1}}$ et M_σ.
      i. Premier exemple : σ_1 est la permutation définie par :
      $$\sigma_1 : \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{array}$$
      ii. Deuxième exemple : σ_2 est la permutation définie par :
      $$\sigma_2 : \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{array}$$
   (c) Si σ est l'identité de $[\![1,n]\!]$ (pour tout $i \in [\![1,n \ \sigma(i) = i)$, que sont f_σ et M_σ ?
   (d) Justifier que les matrices M_σ sont exactement les matrices présentant sur chaque ligne et sur chaque colonne une fois la valeur 1 et $n-1$ fois la valeur 0.
   (e) Si $\sigma \in S_n$, montrer que $M_\sigma \in \mathcal{A}_n$.
   (f) Justifier que ${}^tM_\sigma = M_{\sigma^{-1}}$.
   (g) Soit $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$; montrer que $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma\circ\sigma'}$; en déduire que M_σ est inversible et donner son inverse.

6. Soit $\sigma \in S_n$, montrer que M_σ est un point extremal de $\mathcal{A}_n$.